FINAL – 11/12/2008 – TEMA 1

Ej. 1) a) Hallar una parametrización de la curva intersección de las superficies $\begin{cases} z = 2x \\ x^2 + 2y^2 = 9 \end{cases}$

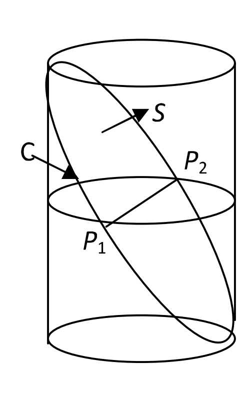
b) Hallar la circulación del campo $\overline{F}(x, y, z) = (Q(x)\ ,\ 9\ , -2Q(x))$ a lo largo de la curva descripta en a) entre los puntos $P_1 = (1, 2, 2)$ y $P_2 = (-1, 2, -2)$ si se sabe que el valor de $Q(x)$ sobre el segmento que une dichos puntos es 1.

SOLUCIÓN: a) escribiendo la ecuación del cilindro elíptico en la forma: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9/2} = 1$ conviene tomar la

siguiente parametrización para esta superficie: $\begin{cases} x = 3\cos(t) \\ y = \frac{3}{\sqrt{2}} sen(t) \\ z = z \end{cases}$

Por lo tanto una parametrización de C es: $\overline{g}(t) = (3\cos(t)\ ,\ \frac{3}{\sqrt{2}} sen(t)\ ,\ 6\cos(t)\ )$

b) Como no se conoce $Q(x)$ se tiene que calcular la circulación por el teorema del Rotor, para ello consideramos la superficie abierta S como se ve en la figura, cuya frontera es C entre los puntos P_1 y P_2 y el segmento de recta que une dichos puntos.



Calculamos el Rotor del campo:

$$\nabla \times \overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q(x) & 9 & -2Q(x) \end{vmatrix} = (0\ ,\ -2Q(x)\ ,\ 0\ )$$

El Teorema del Rotor dice que la circulación del campo F de clase C^1 ,a lo largo de la curva C (frontera de la superficie S) coincide con el flujo del Rotor del campo a través de la superficie suave S, es decir:

$\int_{\partial S} \overline{F}\ .\ \overline{dx} = \iint_S \nabla \times \overline{F}\ .\ \breve{n}\ ds$, siendo la frontera de S la unión de la curva C y el segmento $\overline{P_1P_2}$. Entonces, sabiendo que el valor de $Q(x)$ sobre el segmento que une dichos puntos es 1 y que el vector normal al plano $z = 2x \rightarrow 2x - z = 0$ es: (2 , 0 , – 1), el segmento de recta tiene ecuación: $\overline{g}(\lambda) = (1,2,2) + \lambda\ (-2, 0 - 4)$

$$\int_C \overline{F}\,.\,\overline{dx} \;+\; \int_{\overline{P_1P_2}} \overline{F}\,.\,\overline{dx} \;=\; \underbrace{\iint_S (0\,,\,-2Q(x)\,,\,0\,)\,.\,\;(2,0,-1)\;ds}_{0}$$

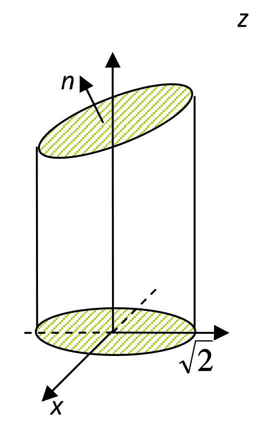
$$\int_C \overline{F}\,.\,\overline{dx} \;=\; -\int_{\overline{P_1P_2}} \overline{F}\,.\,\overline{dx} = -\int_0^1 (1,9,-2)\,.\,(-2,0,-4)\,dt = -\int_0^1 -6\;dt = 6$$

Respuesta: La circulación pedida es 6.

Ejercicio 2. Sea $D=\{(x,y,z)/\,x^2+y^2\le 2\;\;,\;-1\le z\le a(y+4)\}$, *con* $a\in R^+$. Demostrar que el flujo del campo vectorial $\overline{f}(x,y,z)=(0,0,x^2+y^2)$ sobre la tapa superior de la región *D* <u>es independiente de *a*</u> y calcular su valor indicando el sentido de la normal utilizada.

SOLUCIÓN:

El flujo a través de la tapa se calcula mediante integrales de superficie.



Siendo la ecuación de la tapa superior: $z=a(y+4)$, definimos la función $F(x,y,z)=z-a(y+4)$ cuya superficie de nivel 0 es el plano considerado. Un vector normal a la superficie está dado por $\breve{n}=\nabla F=(0,-a,1)$ luego, el flujo es:

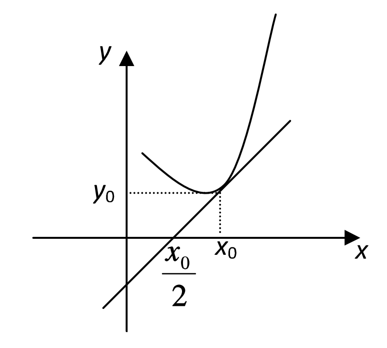
$$Flujo \;=\; \iint_S \overline{f}\;.\;\breve{n}\;\;ds \;=\; \int\!\!\int_D \underbrace{(0,0,x^2+y^2)\;.\;(0,-a,1)}_{x^2+y^2}\;\;dx\;\;dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\!\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2.\rho\;\;d\rho\;\;d\varphi = \int_0^{2\pi} \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{\sqrt{2}}\;d\varphi \;=\; \int_0^{2\pi}\frac{4}{4}\;d\varphi \;=\; 2\pi$$

<u>**Respuesta**</u>**:** Quedó demostrado que el flujo no depende del valor de a. Su valor es 2π **.**

Ejercicio 3. Hallar las curvas que satisfacen que en todo punto (x_0,y_0), su recta tangente corta al eje *x* en el punto $\left(\frac{x_0}{2}\;,\;0\right)$.

Solución:



La <u>pendiente de la recta tangente</u>, que pasa por los puntos (x_0, y_0) y $\left(\frac{x_0}{2}, 0\right)$ es:

$$y' = \frac{y_0}{x_0 - \frac{x_0}{2}} \Rightarrow y' = \frac{y_0}{\frac{x_0}{2}} \Rightarrow y' = \frac{2y_0}{x_0}$$

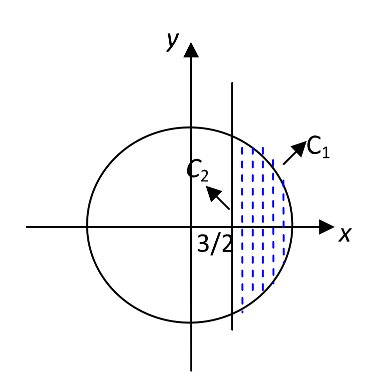
$$y' = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx \Rightarrow \ln y = 2\ln x + \ln C \Rightarrow \ln y = \ln(C\,x^2)$$

$$\textit{Solución General}: \quad y = C\,x^2$$

<u>Respuesta</u>: Las curvas que satisfacen lo pedido son**:** $y = C\,x^2$

Ejercicio 4. Sea $R = \left\{(x, y) / x^2 + y^2 \le 9 \ , \ x \ge \frac{3}{2}\right\}$. Calcular el área de R integrando un campo vectorial conveniente a lo largo de su curva frontera.

Solución: Para encontrar el área de la región sombreada, consideramos un campo vectorial $\overline{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ de clase C_1 y siendo la región R simplemente conexa,



cuya frontera C es una curva de Jordan, podemos aplicar el teorema de Green que dice:

$$\int_C P\ dx + Q\ dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\ dy$$

Elegimos el campo siguiente: $\overline{F}\,(x, y) = (0\ , x)$ y calculamos $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 0 = 1$. La curva C es la unión de la curva C_1(arco de circunferencia) con C_2 (segmento $\overline{P_1P_2}$) . Los puntos de intersección de C_1 y C_2 son:

Elegimos para el arco de la circunferencia la parametrización dada por: $\overline{g}(t) = (3\cos(t), 3\,sen(t))$ con $t \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ y para el segmento $\overline{P_1P_2}$ la parametrización: $\overline{h}(t) = (\frac{3}{2}\ , t)$

$$\int_{C_1} x\,dy + \int_{C_2} x\,dy = \underbrace{\iint_R 1\,dx\,dy}_{Area\ de\ R} \quad \Rightarrow \quad \acute{A}rea\ de\ R = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 3\cos(t)\, 3\cos(t)\, dt + \int_{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{3}{2}\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \acute{A}rea\ de\ R = 9 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(t)\, dt + \frac{3}{2}\,(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}) = 9\left(\frac{1}{2}t + \frac{sen\ (2t)}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{9\sqrt{3}}{4} = 3\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

<u>Respuesta</u>: Área (R) **=** $3\pi + \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ **Observación:** $\sqrt{27} = \sqrt{9\,.\,3} = 3\sqrt{3}$.

Ejercicio 5. Hallar el punto sobre la curva definida por $(x-2)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 = 1$ que haga mínima la circulación del campo vectorial $\overline{f}(x,y) = (x,y)$ desde el origen hasta dicho punto.

Solución: El campo dado $\overline{f}$ es el gradiente de un potencial pues, si sus componentes son

$P(x,y) = x$; $Q(x;y) = y$ resulta $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ por lo tanto la integral de línea no depende de la curva que una un punto de la circunferencia con el origen.

Una parametrización de la circunferencia es: $\overline{g}(t) = (2+\cos(t)\ ,\ 2\sqrt{3} + sen(t))$.

Calculamos la función Potencial, sabiendo que $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = P(x,y) = x$; $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = Q(x,y) = y$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x \ \Rightarrow \ \phi = \frac{x^2}{2} + C(y)\ , \text{ de donde } \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = C'(y) = y \quad \Rightarrow \quad C(y) = \frac{y^2}{2} + K$$

La función potencial es: $\boxed{\phi(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + K\ .}$

Por el teorema fundamental de integral de línea para Campos Vectoriales Gradiente ($\overline{F} = \nabla\phi$) tenemos que:

“ Si $\phi : R^2 \to R$ es de clase C ^{1} y $\overline{g} : [a,b] \to R^2$ es una trayectoria seccionalmente suave, de clase C ^{1} , entonces:

$\int_C \nabla\phi\ .\ \overline{ds} = \phi(\overline{g}(b)) - \phi(\overline{g}(a))$ siendo $\overline{g}(a)$; $\overline{g}(b)$ el punto inicial y el punto final de la curva”. Luego:

$$\int_C \nabla\phi \,.\, \overline{ds} = \int_{(0,0)}^{(2+\cos(t),\,2\sqrt{3}+sen(t))} (x,y)\,.\,\overline{ds} = \phi(2+\cos(t),2\sqrt{3}+sen(t)) - \phi(0,0) =$$

$$= \frac{(2+\cos(t))^2}{2} + \frac{(2\sqrt{3}+sen(t))^2}{2} = \frac{4+4\cos(t)+\cos^2(t)+12+4\sqrt{3}\,sen(t)+sen^2(t)}{2} =$$

$$= 8 + 2\cos(t) + 2\sqrt{3}\ sen(t)$$

Llamando: $h(\mathrm{t}) = 8 + 2\cos(t) + 2\sqrt{3}\ sen(t)$ determinamos los extremos de esta función de una variable , los puntos críticos son:

$$h'(t) = -2\ sen(t) + 2\sqrt{3}\cos(t) = 0 \ \Rightarrow tg(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \underline{t = \frac{\pi}{6} \ \ ó \ \ t = \frac{7\pi}{6}}$$

Como $h(\frac{\pi}{6}) = 8 + 2\sqrt{3}$; $h(\frac{7\pi}{6}) = 8$ el mínimo se produce para $t = \frac{7\pi}{6}$

Respuesta: La circulación es mínima desde el punto de la curva $(x,y) = (2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ 2\sqrt{3} + \frac{1}{2})$